



КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ АЛЬ-ФАРАБИ



ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ  
КАФЕДРА ТЕПЛОФИЗИКИ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

3D моделирование физических процессов

Методы представления ДУ в конечных разностях.

Лектор: PhD  
Максимов Валерий Юрьевич

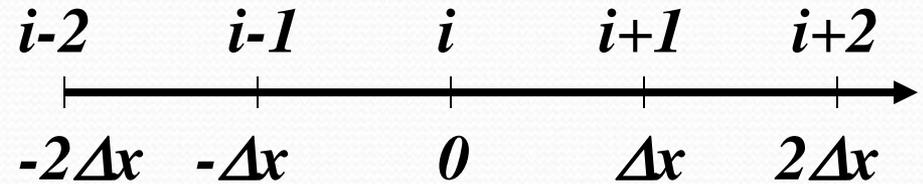
## Вопросы по предыдущей лекции:

1. Напишите правостороннее конечно-разностное соотношение для первой производной.
2. Напишите левостороннее конечно-разностное соотношение для первой производной.
3. Напишите центральное конечно-разностное соотношение для первой производной.
4. Напишите конечно-разностное соотношение для второй производной.
5. Какие из этих 4-х конечно-разностных соотношений имеют 1-й порядок точности, а какие 2-й?
6. Напишите конечно-разностное соотношение для частной производной:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{i,j}$$

## 2. Метод полиномиальной аппроксимации

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots$$



$$\frac{df}{dx} = b + 2cx + 3dx^2 + \dots$$

$$\Rightarrow \left. \frac{df}{dx} \right|_i = b \quad (1)$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = 2c + 6dx + \dots$$

$$\Rightarrow \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_i = 2c \quad (2)$$

$$f_{i-1} \approx a - b\Delta x + c\Delta x^2 - d\Delta x^3 \quad (3)$$

$$f_{i-1} + f_{i+1} \approx 2f_i + 2c\Delta x^2$$

$$f_i = a \quad (4)$$

$$f_{i+1} \approx a + b\Delta x + c\Delta x^2 + d\Delta x^3 \quad (5)$$

$$c \approx \frac{f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i}{2\Delta x^2}$$

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_i \approx \frac{f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i}{\Delta x^2}$$

**(5) - (3):**  $f_{i+1} - f_{i-1} \approx 2b\Delta x + 2d\Delta x^3$

$$f_{i+1} - f_{i-1} \approx 2b\Delta x \quad \Rightarrow \quad b \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}$$

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_i \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}$$

**(1)**

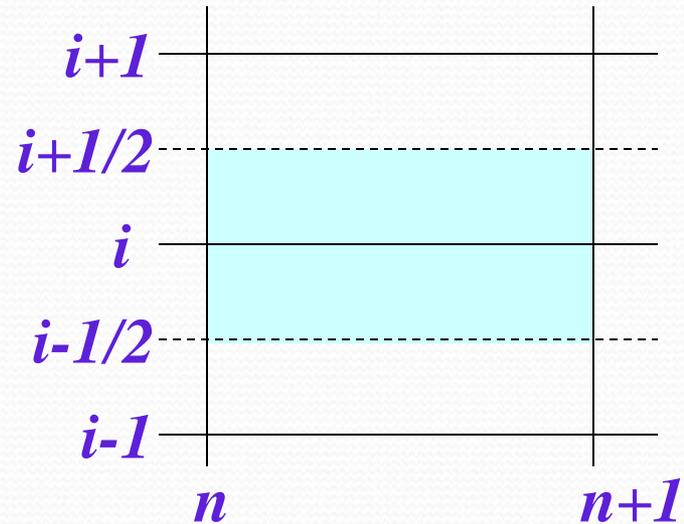
**(3):**  $f_{i-1} \approx a - b\Delta x$  }  $\Rightarrow f_{i-1} \approx f_i - b\Delta x \Rightarrow \left. \frac{df}{dx} \right|_i \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}$

**(4):**  $f_i \approx a$

**(5):**  $f_{i+1} \approx a + b\Delta x$  }  $\Rightarrow f_{i+1} \approx f_i + b\Delta x \Rightarrow \left. \frac{df}{dx} \right|_i \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}$

### 3. Метод интегрирования по контрольному объему

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$



$$\int_{i-1/2}^{i+1/2} \int_n^{n+1} \frac{\partial f}{\partial t} dt dx +$$

$$+ \int_n^{n+1} \int_{i-1/2}^{i+1/2} u \frac{\partial f}{\partial x} dx dt = \int_n^{n+1} \int_{i-1/2}^{i+1/2} a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx dt$$

$$\int_{i-1/2}^{i+1/2} (f^{n+1} - f^n) dx + u \int_n^{n+1} (f_{i+1/2} - f_{i-1/2}) dt = a \int_n^{n+1} \left( \left. \frac{df}{dx} \right|_{i+1/2} - \left. \frac{df}{dx} \right|_{i-1/2} \right) dt$$

# Теорема «о среднем»:

$$\int_{z_k}^{z_{k+1}} f(z) dz \approx f(z^*) \Delta z \quad \Delta z = z_{k+1} - z_k \quad z^* \in [z_k, z_{k+1}]$$

$$x^* = x_i, \quad t^* = t_n: \quad f_{i+1/2} = (f_{i+1} + f_i)/2 \quad f_{i-1/2} = (f_{i-1} + f_i)/2$$

$$(f_i^{n+1} - f_i^n) \Delta x + u(f_{i+1/2}^n - f_{i-1/2}^n) \Delta t =$$

$$= a \left( \left. \frac{df}{dx} \right|_{i+1/2}^n - \left. \frac{df}{dx} \right|_{i-1/2}^n \right) \Delta t$$

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{i-1/2}^n \approx \frac{f_i^n - f_{i-1}^n}{\Delta x}$$

$$\int_i^{i+1} \left. \frac{df}{dx} \right| dx = f_{i+1}^n - f_i^n \approx \left. \frac{df}{dx} \right|_{i+1/2}^n \Delta x$$

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{i+1/2}^n \approx \frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{\Delta x}$$

ТОЧНОЕ  
ЗНАЧЕНИЕ

ПО Т-МЕ О СРЕДНЕМ

$$(f_i^{n+1} - f_i^n) \Delta x + u \left( \frac{f_{i+1}^n + \cancel{f_i^n}}{2} - \frac{f_{i-1}^n + \cancel{f_i^n}}{2} \right) \Delta t =$$

$$= a \left( \frac{f_{i+1}^n - \textcircled{f_i^n}}{\Delta x} - \frac{\textcircled{f_i^n} - f_{i-1}^n}{\Delta x} \right) \Delta t$$

$$\frac{(f_i^{n+1} - f_i^n) \cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x} \Delta t} + u \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n \cancel{\Delta t}}{2 \cancel{\Delta x} \Delta t} = a \frac{f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - 2f_i^n \cancel{\Delta t}}{\Delta x \cancel{\Delta x} \Delta t}$$

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + u \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x} = a \frac{f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - 2f_i^n}{\Delta x^2}$$